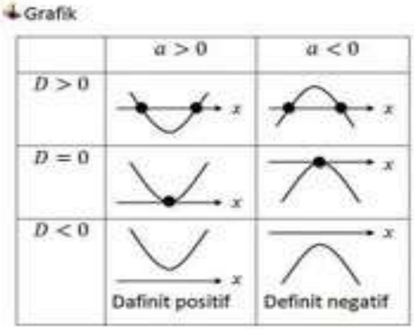
*Tambahan Grafik Fungsi Kuadrat

GRAFIK FUNGSI KUADRAT

- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $D = b^2 - 4ac$
  - $D > 0$
    Grafik memotong sumbu x di dua titik berbeda
  - $D = 0$
    Grafik memotong sumbu x di satu titik (menyinggung sumbu x)
  - $D < 0$
    Grafik tidak memotong maupun menyinggung sumbu x
- Grafik



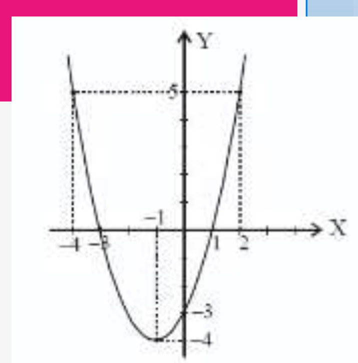
Langkah-langkah menggambar grafik:

1. Tentukan pembuat nol fungsi → y=0 atau f(x)=0
2. Tentukan sumbu simetri x = -b/2a
3. Tentukan titik puncak P (x,y) dengan x = -b/2a dan y = D/(-4a)
4. Gambarlah sketsa grafiknya

FUNGSI KUADRAT

1. Diketahui :
$f(x) = x^2+2x-3$

Penyelesaian:
a. Domain fungsi f adalah
$\{x \mid -4 <= x < 2\}$
b. Nilai minimum fungsi f : -4
c. Nilai maksimm fungsi f :5
d. Range fungsi f :
$\{y \mid -4 <= y <= 5\}$
e. Pembuat nol fungsi f : -3 dan 1
f Koordinat titik balik minimum grafik fungsi (-1, -4)



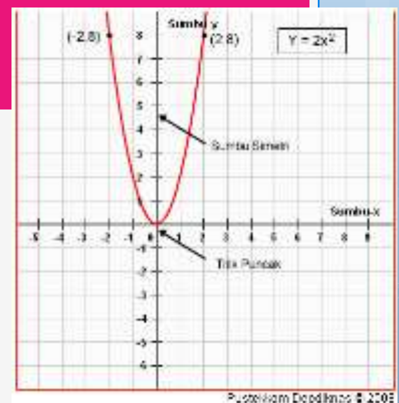
FUNGSI KUADRAT

2. Diketahui :
$f(x) = 2x^2$ dimana domain dan kodomain berupa bil riil

Menuliskan fungsi dalam tabel

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	8	2	0	2	8

Menuliskan fungsi dalam grafik Kartesius :



Rumus Umum Fungsi

Fungsi invers dari fungsi linear

Untuk fungsi $f(x) = ax + b$ dapat dicari fungsi inversnya sebagai berikut :

Misal : $f(x) = y \Rightarrow \; y = ax + b \Leftrightarrow ax = y - b$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

Jadi, jika $f(x) = ax + b$, maka $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

Contoh :

Jika $f(x) = 2x + 3$ maka $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

Fungsi invers dari fungsi rasional

Jika $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $x \neq \dfrac{-d}{c}$ maka $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$; $x \neq \dfrac{a}{c}$ (buktikan !)

Contoh :

1. Jika $f(x) = \dfrac{-2x+4}{3x+5}, x \neq \dfrac{-5}{3}$ maka $f^{-1}(x) = \dfrac{-5x+4}{3x+2}, x \neq \dfrac{-2}{3}$
2. Jika $f(x) = \dfrac{3x-4}{-6x+2}, x \neq \dfrac{1}{3}$ maka $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-4}{-6x-3}, x \neq \dfrac{-1}{2}$

Fungsi invers dari fungsi rasional

$$3.\ \text{Jika } f(x) = \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}x}, x \neq 0 \quad \text{maka} \quad f^{-1}(x) = \frac{-0x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}x + 0}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}} = \frac{-4}{3x-6}, x \neq 2$$

$$4.\ \text{Jika } f(x) = \frac{2}{\frac{2}{3}x + 4} = \frac{0x+2}{\frac{2}{3}x+4}, x \neq -6$$

$$\text{maka} \quad f^{-1}(x) = \frac{-4x+2}{\frac{2}{3}x - 0} = \frac{-4x+2}{\frac{2}{3}x} = \frac{-12x+6}{2x} = \frac{-6x+3}{x}, x \neq 0$$

Fungsi invers dari fungsi kuadrat

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{misal} : f(x) = y$$

$$y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 + bx = y - c$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{y-c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad = \frac{4a(y-c)}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

lanjutan

$$\Leftrightarrow \quad = \frac{4ay - 4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad = \frac{4ay + b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{4ay + b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{4ay + b^2 - 4ac}{2a}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = \frac{-b \pm \sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

lanjutan

Jadi, jika $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$$\text{maka} \quad f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{4ax + b^2 - 4ac}}{2a}$$

Invers fungsi akan merupakan fungsi jika dipenuhi syarat-syarat sebagai fungsi lanjutan

Jika suatu fungsi kuadrat dapat dinyatakan sebagai:

1. $f(x) = (x + p)^2 + q$, maka

   $f^{-1}(x) = -p \pm \sqrt{x - q}$

2. $f(x) = p(x + q)^2 + r$

   $f^{-1}(x) = -q \pm \sqrt{\frac{x - r}{p}}$

Tentukan rumus fungsi invers dari fungsi :

1. $f(x) = x^2 - 6$
2. $f(x) = (x - 3)^2$
3. $f(x) = (x - 3)^2 - 7$
4. $f(x) = x^2 - 4x + 4$
5. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
6. $f(x) = 4x^2 - 16x + 25$

Fungsi invers dari fungsi dalam bentuk akar

$$f(x) = \sqrt[n]{ax + b}$$
$$y = \sqrt[n]{ax + b}$$
$$\Leftrightarrow y^n = ax + b$$
$$\Leftrightarrow ax = y^n - b$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{y^n - b}{a}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y^n - b}{a}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \frac{x^n - b}{a}$

$$\boxed{\text{Jika } f(x) = \sqrt[n]{ax + b}, \text{ maka } f^{-1}(x) = \frac{x^n - b}{a}}$$

lanjutan

- Tentukan rumus fungsi invers dari :

1. $f(x) = \sqrt{x+3}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$
3. $f(x) = \sqrt[5]{-3x+4}$

Komposisi Fungsi

Outline

1. Pengertian
2. Sifat Fungsi Komposisi
3. Menentukan daerah asal dan hasil dari fungsi komposisi
4. Menentukan suatu fungsi dari fungsi komposisi yang diketahui

1. Komposisi Fungsi

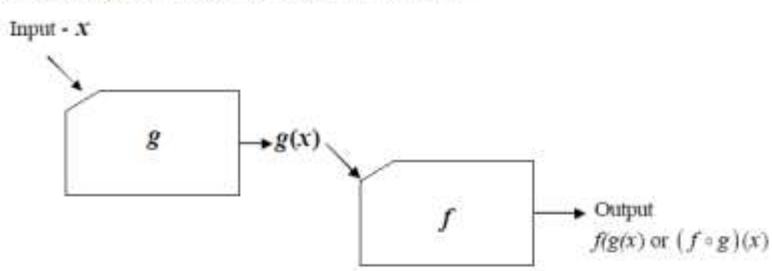
- Penggabungan operasi dua fungsi secara berurutan akan menghasilkan sebuah fungsi baru.
- Penggabungan tersebut disebut *komposisi fungsi* dan hasilnya disebut fungsi komposisi.

Principles

Given two functions f and g, the **composite function**, denoted by $f \circ g$ (read as "f composed with g"), is defined by

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$$

The composition of f and g can be shown in a diagram.



Page 1 of 20

>> Jika : $f(x) = 4 + 3x^2$

maka f bekerja pada x untuk menghasilkan f(x).

>> Jadi, jika $x = s$ maka $f(s) = 4 + 3s^2$.

>>Misalkan $s = g(x)$ dengan g suatu fungsi maka:

$$f(s) = f\ (g(x))$$

>> Fungsi yang dihasilkan disebut komposit f dengan g, ditulis ->> $(f \circ g)(x)$

>> Jadi $(f \circ g)\ (x) = f(g(x))$

Sebagai contoh:

- Misalkan $f(x) = 4 + 3x^2$, $g(x)=x-4$. Tentukanlah:
  a. $(f \circ g)\ (x)$ b. $(g \circ f)\ (x)$
- Penyelesaian:
  a. $(f \circ g)\ (x) = f\ (g(x)) = f(x-4)^2 = 4 + 3(x-4)^2$
  $= 4 + 3(x^2-8x+16)$
  $= 3x^2 - 24x + 52$
  b. $(g \circ f)\ (x) = g\ (f(x)) = g\ (4+3x^2)$
  $= 4 + 3x^2 - 4 = 3x^2$

2. Sifat Komposisi Fungsi

=> Tidak komutatif:

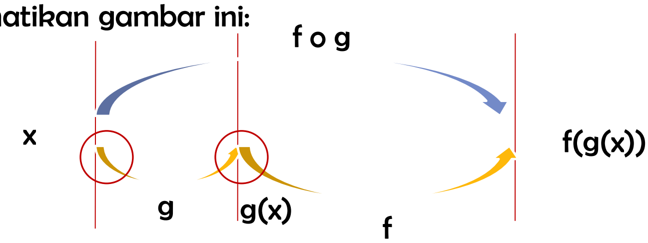
$f \circ g \neq g \circ f$

Contoh:

1. Diketahui $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = 2x - 3$. Tentukan:
   a. $(f \circ g)(x)$
   b. $(g \circ f)(x)$
2. *Jika* $f(x) = x^2 + 1$ *dan* $g(x) = 2x - 1$ *maka tentukan* $(fog)(x)$!
3. *Jika* $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 1$ *dan* $h(x) = x^3$ *maka tentukan* $(hogof)(x)$

3. Daerah Asal dan Hasil Fungsi Komposisi

Daerah asal fungsi komposit f o g adalah bagian dari daerah asal g dan nilai g(x) yang dapat diterima sebagai masukan f. Perhatikan gambar ini:

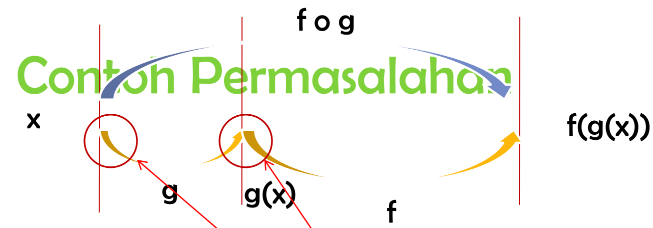


Daerah domain (asal) fungsi f adalah daerah hasil padanan/pemetaan fungsi g terhadap x.

Contoh Permasalahan

- Misalkan $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = \frac{2}{(x-7)}$
- Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari:
- a. f o g (x) b. (g o f) (x)
- Penyelesaian:
- >> $f \circ g\,(x) = f(g(x)) = f\left[\frac{2}{(x-7)}\right] = \left[\frac{2}{(x-7)}\right]^3 + 2 =$
- $= \frac{8}{x^3 - 21x^2 + 147x - 343} + 2$

Contoh Permasalahan



- a. Daerah asal g(x) = x = $\frac{2}{(x-7)}$ >> { x : x € R, x ≠ 7)
- b. Daerah asal f(g(x)) = g(x) = y >> {y : y € R, y ≠ 0}

Pastikan daerah hasil g(x) sesuai untuk daerah asal f o g (x)

Sehingga daerah asalnya merupakan gabungan dari dua fungsi tersebut yaitu:

{x : x € R, x ≠ 0, x ≠ 7}

Contoh Permasalahan

- c. Daerah hasilnya adalah pemetaan dari semua bilangan fungsi tersebut, dengan pengecualian yang sama dengan daerah asalnya:

maka daerah hasil {x : x € R, x ≠ 0, x ≠ 7} dipetakan terhadap

- $$f(g(x)) = \frac{8}{x^3 - 21x^2 + 147x - 343} + 2$$
- >> (x = 0) -> $f(g(x)) = -\frac{8}{343} + 2$
- >> (x = 7) -> f (g(x)) = 2
- Sehingga daerah hasilnya {y : y € R, y ≠ $-\frac{8}{343} + 2$, y ≠ 2}

Latihan soal

- Selesaikan soal (b) untuk contoh soal di atas!
- (g o f) (x)

2. Misalkan $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $g(x) = \frac{1}{2x}$.

   Tentukan daerah asal dan hasil dari (f o g) (x) dan (g o f)(x)!

4. Menentukan suatu fungsi dari fungsi komposisi yang diketahui

Diketahui $f(x) = 3x - 1$

dan $(f \circ g)(x) = x^2 + 5$

Tentukan g(x).

Jawab

$f(x) = 3x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 + 5$

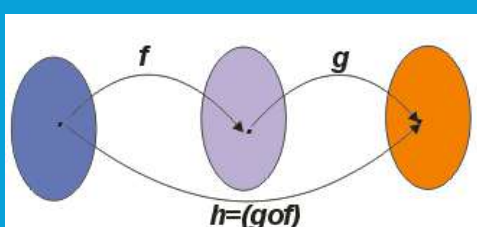
$f[g(x)] = x^2 + 5$

$3.g(x) - 1 = x^2 + 5$

$3.g(x) = x^2 + 5 + 1 = x^2 + 6$

Jadi $g(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 6)$

5. Fungsi komposisi dan invers



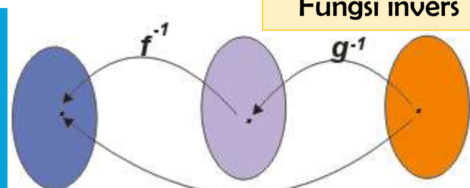
Jalurnya berkebalikan dari komposisi

Fungsi komposisi

Jadi $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

Ada dua cara perumusan fungsi

Fungsi invers



$h^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$

$(gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$

Contoh soal

Contoh:
Misalkan $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ ditentukan dengan rumus $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 5x - 2$. Tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$

Jawab:
Cara 1:
Dicari $(f \circ g)(x)$ terlebih dahulu selanjutnya dicari $(f \circ g)^{-1}(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (5x - 2) + 3 = 5x + 1$$

$$y = 5x + 1$$
$$\Leftrightarrow 5x = y - 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}$$

Jadi $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$

Soal Latihan

Contoh:
Fungsi-fungsi f dan g ditentukan dengan rumus:
$f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = \dfrac{3x + 5}{x - 4}$
Carilah $(g \circ f)^{-1}(x)$!

Soal Latihan

Diketahui f:R → R; g:R →R

Dengan f(x)= $\frac{x+4}{x-6}$; g(x) = 2x – 1, maka $(fog)^{-1}(x) = \ldots.$

Soal Latihan

7. Jika $f(x) = \frac{x+5}{2x+1}$ maka $f^{-1}(3) = \ldots.$

A. -3/5
B. -2/5
C. 1
D. 2/5
E. 3/5

Terima Kasih