

# KUMPULAN SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA

## Bagian Pertama

Disusun Oleh  
Raja Octovin P. D

APRIL 2008

SMA NEGERI 1 PEKANBARU

Jl. Sulthan Syarif Qasim 159 Pekanbaru

100 SOAL PILIHAN

1. Matematikawan August de Morgan menghabiskan seluruh usianya pada tahun 1800-an. Pada tahun terakhir dalam masa hidupnya dia mengatakan bahwa: "Dulu aku berusia  $x$  tahun pada tahun  $x^2$ ." Pada tahun berapa ia dilahirkan?
2. Lima ekor kambing memakan rumput seluas 5 kali ukuran lapangan bola dalam waktu 5 hari. Berapa harikah yang dibutuhkan oleh 3 ekor kambing untuk menghabiskan rumput seluas 3 kali ukuran lapangan bola?
3. Budi berlari tiga kali lebih cepat dari kecepatan Iwan berjalan kaki. Misalkan Iwan, yang lebih cerdas dari Budi menyelesaikan ujian pada pukul 2:00 dan mulai berjalan pulang. Budi menyelesaikan ujian pada pukul 2:12 dan berlari mengejar Iwan. Pada pukul berapakah Budi tepat akan menyusul Iwan?
4. Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan real berbeda sehingga
 
$$\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$$
 Tentukanlah nilai  $\frac{a}{b}$ .
5. Berapakah banyaknya digit  $2^{1999} \times 5^{2000}$ ?
6. Misalkan  $a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{1001^2}{2001}$  dan  $b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{1001^2}{2003}$ . Tentukan bilangan bulat yang nilainya paling dekat dengan  $a - b$ .
7. Suatu persegi panjang berukuran 8 kali  $2\sqrt{2}$  mempunyai titik pusat yang sama dengan suatu lingkaran berjari-jari 2. Berapakah luas daerah irisan antara persegi panjang dan lingkaran tersebut?
8. Masing-masing dari kelima pernyataan berikut bernilai benar atau salah.
  - (a) pernyataan (c) dan (d) keduanya benar

(b) pernyataan (d) dan (e) tidak keduanya salah

(c) pernyataan (a) benar

(d) pernyataan (c) salah

(e) pernyataan (a) dan (c) keduanya salah

Berapakah banyak diantara kelima pernyataan di atas yang benar?

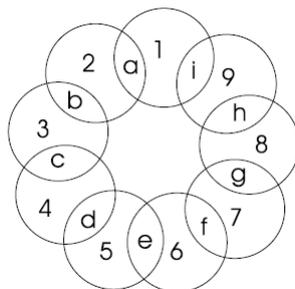
9. Misalkan  $N$  adalah bilangan bulat terkecil yang bersifat: bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi oleh 7, dan bersisa 4 jika dibagi 9. Berapakah hasil penjumlahan digit-digit  $N$ ?

10. Berapakah hasil perkalian

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2003^2}\right)?$$

11. Untuk menentukan wakilnya dalam cabang lari 110 m gawang putra, sebuah SMU mengadakan seleksi yang diikuti 5 orang siswa. Dalam seleksi tersebut diadakan tiga kali lomba yang pada setiap lomba, pelari tercepat diberi nilai 5, sedangkan peringkat di bawahnya berturut-turut mendapat nilai 3, 2, 1, 1. Tidak ada dua pelari yang menempati peringkat yang sama. Jika pemenang seleksi diberikan kepada yang nilai totalnya paling tinggi pada ketiga lomba, berapakah nilai terendah yang mungkin dicapai oleh pemenang seleksi?

12. Misalkan  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  menyatakan bilangan-bilangan bulat positif berbeda yang kurang dari atau sama dengan sembilan. Jika jumlah setiap bilangan dalam setiap lingkaran sama, berapakah nilai  $a + d + g$  ?



13. Kuadrat sebuah bilangan bulat bila dibagi dengan 19 memberikan suatu bilangan prima dan sisa pembagian 9. Berapakah bilangan prima yang dimaksud?
14. Dari sembilan orang siswa akan dibentuk 3 kelompok, masing-masing beranggota tiga orang. Berapa banyaknya cara membentuk kelompok ini?
15. Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah dan 10 bola putih. Jika diambil dua bola bersamaan, berapakah peluang memperoleh dua bola berwarna sama?
16. Pada segitiga ABC, titik F membagi sisi AC dalam perbandingan 1 : 2. Misalkan G titik tengah BF dan E titik perpotongan antara sisi BC dengan AG. Berapakah perbandingan sisi BC yang terbagi oleh titik E?
17. Dalam suatu pertemuan terjadi 28 jabat tangan. Setiap dua orang saling berjabat tangan paling banyak sekali. Berapakah banyak orang minimum yang hadir dalam pertemuan tersebut?
18. Di antara lima orang gadis, Arinta, Elsi, Putri, Rita, dan Venny, dua orang memakai rok dan tiga orang memakai celana panjang. Arinta dan Putri memakai jenis pakaian yang sama. Jenis pakaian Putri dan Elsi berbeda, demikian pula dengan Elsi dan Rita. Kedua gadis yang memakai rok adalah ...
19. Barisan 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, ... adalah barisan terdiri dari semua bilangan asli yang bukan kuadrat atau pangkat tiga bilangan bulat. Suku ke-250 dalam barisan adalah ...
20. Nanang mencari semua bilangan empat digit yang selisihnya dengan jumlah keempat digitnya adalah 2007. Tentukan semua bilangan yang ditemukan Nanang.
21. Gaji David 20% lebih banyak dari gaji Andika. Ketika Andika memperoleh kenaikan gaji, gajinya menjadi 20% lebih banyak dari gaji David. Persentase kenaikan gaji Andika adalah ...

22. Banyak pasangan bilangan bulat positif  $(x, y)$  yang memenuhi persamaan  $3x + 5y = 501$  adalah ...
23. Jika  $N = 123456789101112\dots99100$ , maka tiga angka pertama  $\sqrt{N}$  adalah ...
24. Jika  $a$  dan  $b$  dua bilangan asli memenuhi  $a - b \leq 0$  sehingga  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{4} + \sqrt{b}}$  bilangan rasional, maka  $a + b$  bernilai ...
25. Keliling sebuah segitiga sama sisi adalah  $s$ . Misalkan  $Q$  adalah sebuah titik di dalam segitiga tersebut. Jika jumlah jarak dari  $Q$  ke ketiga sisi segitiga adalah  $p$ , nyatakanlah  $p$  dalam  $s$ .
26. Empat buah titik berbeda terletak pada sebuah garis. Jarak antara sebarang dua titik dapat diurutkan menjadi barisan 1, 4, 5,  $k$ , 9, 10. Maka  $k = \dots$
27. Sebuah kelompok terdiri dari 2005 anggota. Setiap anggota memiliki 1 rahasia. Setiap anggota dapat mengirim surat kepada anggota lain manapun untuk menyampaikan SATU rahasia yang dipegangnya. Banyaknya surat yang perlu dikirim agar semua anggota kelompok mengetahui seluruh rahasia adalah ...
28. Sebuah kelompok terdiri dari 2005 anggota. Setiap anggota memiliki 1 rahasia. Setiap anggota dapat mengirim surat kepada anggota lain manapun untuk menyampaikan SELURUH rahasia yang dipegangnya. Banyaknya surat yang perlu dikirim agar semua anggota kelompok mengetahui seluruh rahasia adalah ...
29. Himpunan  $A$  dan  $B$  saling lepas dan  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Hasil perkalian semua unsur  $A$  sama dengan jumlah semua unsur  $B$ . Unsur terkecil  $B$  adalah ...

30. Bentuk sederhana dari  $\frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1)(4^3 - 1) \dots (100^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1)(4^3 + 1) \dots (100^3 + 1)}$  adalah ...
31. Bilangan  $n$  terbesar sehingga  $8^n$  membagi  $44^{44}$  adalah ...
32. Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. Misalkan AD memotong BC di P di antara kedua garis. Jika AB = 4 dan CD = 12, berapa jauh P dari garis CD?
33. Tentukan hasil penjumlahan semua bilangan prima yang memenuhi sifat: satu lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 5 dan satu kurangnya dari bilangan kelipatan 6.
34. Berapakah banyak tripel bilangan bulat positif  $(x, y, z)$  memenuhi  $x + y + z = 99$ ?
35. Tentukan himpunan semua bilangan asli  $n$  sehingga  $n(n-1)(2n-1)$  habis dibagi 6.
36. Pada sebuah trapesium dengan tinggi 4, kedua diagonalnya saling tegak lurus. Jika salah satu diagonal tersebut panjangnya 5, berapakah luas trapesium tersebut?
37. Dua bilangan real  $x, y$  memenuhi  $(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1$ . Berapakah nilai  $x + y$ ?
38. Pada suatu persegi ABCD, terdapat titik E di dalam persegi. Berapakah peluang  $\angle AEB$  sudut lancip?
39. Sepuluh tim mengikuti turnamen sepakbola. Setiap tim bertemu satu kali dengan setiap tim lainnya. Pemenang setiap pertandingan memperoleh nilai 3 dan yang kalah memperoleh nilai 0. Untuk pertandingan yang berakhir seri, kedua tim memperoleh nilai masing-masing 1. Di akhir turnamen, jumlah nilai seluruh tim adalah 124. Banyaknya pertandingan yang berakhir seri adalah ...

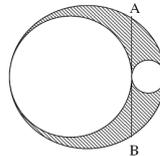
40. Diberikan tiga bilangan positif  $x, y, z$  semuanya berbeda. Jika  $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$ ,  
tentukan nilai  $\frac{x}{y}$ .

41. Nilai  $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ$  sama dengan ...

42. Jika  $p = 2005^2 + 2006^2$  dan  $q = 2007^2 + 2008^2$ , maka  $\sqrt{1 - 2(p+q) + 4pq} = \dots$

43. Sebuah keluarga terdiri dari ayah, ibu, dan beberapa anak. Rata-rata umur keluarga tersebut adalah 18 tahun. Tanpa ayah yang berumur 38 tahun, rata-rata umur keluarga tersebut adalah 14 tahun. Berapakah banyak anak dalam keluarga tersebut?

44. Ketiga titik pusat lingkaran adalah berbeda tetapi terletak pada satu garis. Dua lingkaran pada gambar menyinggung tali busur AB yang panjangnya 4, tentukan luas yang diarsir.



45. Tentukan jarak titik pusat lingkaran luar dan lingkaran dalam suatu segitiga yang panjang sisi-sisinya adalah 6, 8, dan 10.

46. Jika  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ , berapakah nilai  $\frac{1}{a}(a+b) + \frac{1}{b}(b+c) + \frac{1}{c}(c+a)$ .

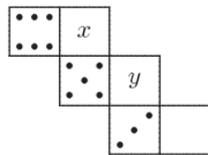
47. Jika  $f(x) = \frac{9^x}{3+9^x}$ , berapakah nilai  $f\left(\frac{1}{9}\right) + f\left(\frac{2}{9}\right) + f\left(\frac{3}{9}\right) + \dots + f\left(\frac{8}{9}\right)$ .

48. Misalkan  $a, b, c$  adalah bilangan bulat memenuhi  $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ , hitung nilai  $a+b+c$ .

49. Suatu bilangan tujuh digit sebut saja  $N$  semuanya digitnya berbeda. Maka  $N$  tidak mungkin mengandung digit ...

50. Hitunglah nilai  $\frac{(1 \times 2 \times 3) + (2 \times 3 \times 4) + (3 \times 4 \times 5) + \dots + (2007 \times 2008 \times 2009)}{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 2007^2 - 2008^2}$ .

51. Suatu kertas akan dibuat menjadi dadu seperti gambar. Masih ada tiga kotak kosong yang akan diisi 1, 2, atau 4. Jika jumlah setiap sisi berhadapan adalah 7, berapakah nilai  $x + y$ ?



52. Jika  $x^2 - 5x + 1 = 0$ , hitunglah nilai  $\sqrt{x^{-6} + x^0 + x^6}$ .

53. Tentukan bilangan tiga digit  $abc$  sehingga  $bca + cab + bac + cba + acb = 2003$ .

54. Bilangan asli  $A, B, C, D$  memenuhi  $A^5 = B^4$ ,  $C^3 = D^2$ ,  $A = C - 19$ . Tentukan nilai  $D - B$ .

55. Tentukan nilai  $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{2006 \times 2007 \times 2008}$ .

56. Tentukan jumlah  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k + 3^{k-1} - 2^{k-2}}{5^{k+1}}$ .

57. Jika  $a^3 - 3ab^2 = 6$  dan  $3ab^2 - b^3 = 8$ , tentukanlah nilai  $a^2 + b^2$ .

58. Jika  $p$  dan  $p + 2$  adalah bilangan prima besar dari 3, tentukan sisa  $p$  dibagi 6.

59. Jika bilangan lima digit  $a679b$  adalah kelipatan 72, tentukan nilai  $a$  dan  $b$ .
60. Suatu konferensi dihadiri oleh 47 tamu. Ada beberapa tamu pria dan beberapa tamu wanita. Tamu pria pertama kenal 16 tamu wanita, tamu pria kedua kenal 17 tamu wanita, dan seterusnya hingga tamu wanita pria terakhir kenal seluruh tamu wanita. Tentukan banyaknya tamu wanita yang dikenal tamu pria terakhir.
61. Apakah jumlah 1984 bilangan asli berurutan dapat menjadi suatu bilangan kuadrat?
62. Tentukanlah nilai  $\sqrt{1+2008 \times 2009 \times 2010 \times 2011}$ .
63. Jika  $\alpha, \beta, \gamma$  adalah akar-akar persamaan kubik  $x^3 - x - 1 = 0$ , tentukanlah nilai  $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ .
64. Tentukanlah nilai real  $x$  sehingga  $x = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ .
65. Buktikan bahwa  $n^2 + n - 1$  dan  $n^2 + 2n$  tidak memiliki faktor persekutuan lebih besar dari 1.
66. Buktikan  $1 + 11^{11} + 111^{111} + 1111^{1111} + \dots + 11111111111^{1111111111}$  habis dibagi 100.
67.  $a + b + c = 0$   
 $\frac{a+b}{ab}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2 + a^2 - b^2) = ?$ .
68. Seseorang mengambil sebuah kartu dari 4 kartu yang bernomor 1, 2, 3, 4, dari sebuah kotak kemudian mencatatnya dan meletakkannya kembali. Dia melakukan hal tersebut

sebanyak 4 kali. Jika pada akhir didapatkan jumlah nomor-nomor kartu adalah 12, berapakah peluang bahwa kartu yang terambil selalu 3?

69. Tentukan himpunan penyelesaian  $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$ .

70. Jumlah dari rata-rata aritmatik himpunan  $A$  dan rata-rata aritmatik himpunan  $B$  adalah 5002. Himpunan  $A$  dan  $B$  terdiri dari bilangan-bilangan asli berurutan. Jika  $A \cap B = \{2005\}$ , tentukan kemungkinan unsur himpunan  $B$  yang terbesar.

71. Tentukan semua segitiga yang sisi-sisinya bilangan bulat dimana nilai keliling dan luasnya sama.

72. Tentukan nilai 
$$\sqrt[8]{2207 - \frac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \dots}}}}$$
.

73. Nyatakan jawaban soal no. 72 dalam bentuk  $\frac{a + \sqrt{b}}{c}$ , dimana  $a, b, c$  bilangan bulat.

74. Diketahui  $n$  adalah semua bilangan asli tidak lebih dari 6. Suatu bilangan enam digit, sebut saja  $X$ , jika dikali 1 jelas digit-digitnya sama. Jika  $X$  dikali 2, digit-digitnya sama, namun urutannya diubah. Jika  $X$  dikali 3, digit-digitnya juga sama, namun urutannya diubah. Hingga jika  $X$  dikali  $n$ , maka digit-digitnya sama, namun urutannya diubah. Tentukan  $X$ .

75. Tunjukkan 
$$\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1993006}} > 1001$$
.

76. Misalkan  $\lfloor x \rfloor$  menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari  $x$ , tentukan  $m$  agar  $m - \left\lfloor \frac{m}{2008} \right\rfloor = 2008$ .

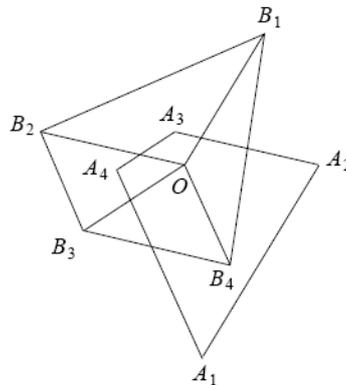
77. Misalkan  $\lfloor x \rfloor$  menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari  $x$ , tentukan semua penyelesaian positif dari  $x^2 - 3\lfloor x \rfloor + 1 = 0$ .

78. Untuk  $x_i = \frac{i}{101}$ , hitung  $\sum_{i=1}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2}$ .

79. ABC adalah segitiga siku-siku dengan sudut A  $100^\circ$  dan panjang  $AB = BC$ . Garis bagi sudut B memotong sisi AC di D. Tunjukkan  $BD + AD = BC$ .

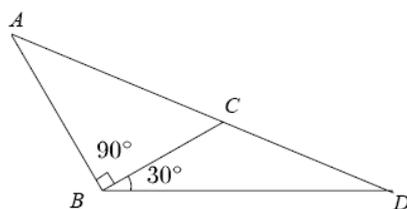
80. Bilangan prima berbentuk 1010101... memiliki  $n$  digit. Tentukan semua  $n$  yang memungkinkan.

81. Perhatikan gambar.



Untuk setiap  $i = 1, 2, 3, 4$  ( $A_5 = A_1$ ), maka  $OB_i$  sejajar  $A_i A_{i+1}$ . Tentukan perbandingan luas bidang  $B_1 B_2 B_3$ .

82. Perhatikan gambar.



Jika panjang  $AB = CD = 1$ , tentukan panjang  $AC$ .

83. Diketahui  $f(1) = 2008$  dan  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$ . Tentukan  $f(2008)$ .

84. Jika  $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$  dan  $f(1) = 2$ , hitung  $f(2008)$ .

85. Misalkan segitiga  $ABC$  adalah suatu segitiga sehingga

$$\frac{BC}{AB-BC} = \frac{AB+BC}{AC}$$

Tentukan rasio  $\angle A : \angle C$ .

86. Suatu paket soal terdiri dari 8 soal essay disiapkan untuk suatu ujian. Setiap siswa hanya menerima 3 soal. Tetapi, tidak ada dua siswa yang menerima lebih dari satu soal yang sama. Berapakah jumlah siswa paling banyak?

87. Tentukan semua pasangan bilangan rasional  $(a, b)$  memenuhi  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ .

88. Misalkan  $p(n)$  menyatakan hasil kali digit-digit  $n$ . Tentukan semua nilai  $n$  yang memenuhi  $11p(n) = n^2 - 2005$ .

89. Tentukan semua pasangan bilangan real  $(x, y)$  yang memenuhi

$$x^3 - y^3 = 4(x - y)$$

$$x^3 + y^3 = 2(x + y)$$

90. Tentukan semua bilangan bulat positif  $p$  agar  $\frac{3p+25}{2p-5}$  juga bulat positif.

91. Tentukan semua  $(x, y, z)$  memenuhi

$$x^2 + 4 = y^3 + 4x - z^3$$

$$y^2 + 4 = z^3 + 4y - x^3$$

$$z^2 + 4 = x^3 + 4z - y^3$$

92. Misalkan  $A$  adalah jumlah digit-digit  $4444^{4444}$  dan  $B$  adalah jumlah digit-digit  $A$ . Tentukanlah jumlah digit-digit  $B$ .

93. Pada suatu kompetisi matematika, tiga soal, yaitu  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , diberikan. Di antara semua peserta, ada 25 peserta yang paling sedikit menyelesaikan satu soal. Dari semua peserta yang tidak menyelesaikan  $A$ , banyak peserta yang menyelesaikan  $B$  adalah dua kali yang menyelesaikan  $C$ . Banyak peserta yang menyelesaikan  $A$  saja adalah satu lebih banyak dari peserta yang mengerjakan soal  $A$  dan paling sedikit satu yang lainnya. Dari semua yang menyelesaikan satu soal saja, setengahnya menyelesaikan  $A$ . Berapa peserta yang menyelesaikan  $B$  saja?

94. Tentukan bilangan terbesar yang merupakan hasil kali bilangan-bilangan asli yang jumlahnya 1976.

95. Tentukan batas-batas  $x$  sehingga  $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$ ?

96. Tentukan semua penyelesaian  $\cos^2 \theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta = 1$ .

97. Jika  $x = \left(1 + \frac{1}{1999}\right)^{1999}$  dan  $y = \left(1 + \frac{1}{1999}\right)^{2000}$ , buktikan  $x^y = y^x$ .

98. Tentukan semua bilangan prima  $p$  sehingga persamaan

$$p+1 = 2x^2$$

$$p^2+1 = 2y^2$$

memiliki penyelesaian bilangan bulat  $(x, y)$ .

99. Tentukan penyelesaian  $(x, y)$  bilangan bulat memenuhi

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$$

100. Suatu segibanyak dapat dibagi menjadi 100 persegi panjang, tetapi tidak dapat dibagi menjadi 99 persegi panjang. Tunjukkan bahwa segibanyak tersebut tak dapat dibagi 99 segitiga.