SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2008
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

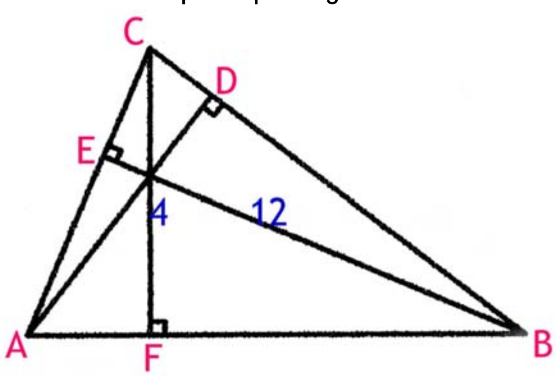
BAGIAN PERTAMA

1. $2008 = 2^3 \cdot 251$
   Banyaknya pembagi positif dari 2008 = (3 + 1)(1 + 1)
   ∴ Banyaknya pembagi positif dari 2008 = **8**.

2. Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA adalah $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$ = 151200
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan syarat kedua T berdekatan adalah sama dengan banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMAIKA, yaitu $\frac{9!}{3!\cdot 2!}$ = 30240
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan adalah = 151200 − 30240 = 120960.
   ∴ Banyaknya cara menyusun = **120960**.

3. Karena 0 < b < a maka $\frac{a+b}{a-b}$ akan bernilai positif.
   $$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} = \frac{6ab+2ab}{6ab-2ab} = 2$$
   ∴ $\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}$

4. Misalkan segitiga ABC dimaksud adalah seperti pada gambar berikut



   Misalkan juga AC = b
   [ABC] = ½ · AC · 12 = ½ · AB · 4
   b · 12 = AB · 4
   AB = 3b
   Misalkan juga BC = a dan panjang garis tinggi dari A adalah x dengan x bilangan asli.
   [ABC] = ½ · a · x = ½ · 4 · 3b
   a x = 12b .... (1)

Ada dua kemungkinan pemahaman terhadap pertanyaan pada soal.

i) Yang ditanyakan adalah maks (x, 4, 12).
Akan dibuktikan bahwa $x \leq 12$ sehingga panjang maksimum dari garis tinggi segitiga ABC adalah 12.
Andaikan bahwa x > 12.
Dari persamaan (1) akan didapat bahwa a < b ………………… (2)
Pada segitiga siku-siku ACF jelas bahwa AC = b > AF
Karena AB = 3b maka FB > 2b
Pada segitiga siku-siku BCF berlaku bahwa BC > FB
Karena BC = a < b sedangkan FB > 2b maka ketaksamamaan tidak mungkin terjadi. Kontradiksi dengan pengandaian awal.
Jadi, $x \leq 12$.
Maka panjang maksimum garis tinggi segitiga ABC adalah **12**.

ii) Yang ditanyakan adalah panjang maksimum dari garis tinggi yang ketiga dari segitiga ABC

- Andaikan 3b adalah sisi terpanjang
  Berdasarkan ketaksamaan segitiga berlaku
  3b < a + b
  Maka 2b < a
  Berdasarkan persamaan (1) maka
  a x < 6a
  Jadi, x < 6
  * Jika x = 5 maka a = $\frac{12}{5}$b
    $AC^2 + BC^2 = b^2 + \left(\frac{12}{5}b\right)^2 = \frac{169}{25}b^2 < AB^2$
    Jadi, jika x = 5 maka segitiga BC tumpul. Tidak memenuhi bahwa segitiga ABC lancip.
  * Jika x = 4 maka a = 3b
    Segitiga ABC sama kaki dengan BC = AB = 3b
    Karena AB adalah sisi terpanjang maka segitiga BC lancip.
- Andaikan a adalah sisi terpanjang
  3b < a
  xa = 12b < 4a
  x < 4
  Karena $x \leq 4$ maka tidak perlu lagi mencari nilai x maksimum.

Jadi, panjang maksimum garis tinggi yang ketiga dari segitiga ABC adalah **4**.

∴ Dari dua kemungkinan ini Penulis lebih cenderung pada kemungkinan pertama yang sesua dengan kata-kata pada soal. Panjang maksimum garis tinggi dari segitiga ABC adalah **12**.

5. Misalkan persamaan garis tersebut adalah y = mx + c
Misalkan juga garis memotong sumbu X di (p, 0) dan sumbu Y di (0, q) dengan p adalah bilangan prima dan q adalah bilangan bulat positif.
Karena garis memotong sumbu X di (p, 0) dan sumbu Y di (0, q) maka persamaan garis tersebut adalah $y = -\frac{q}{p}x + c$.

Garis melalui (0, q) maka c = q. Jadi persamaan garis tersebut adalah $y = -\frac{q}{p}x + q$

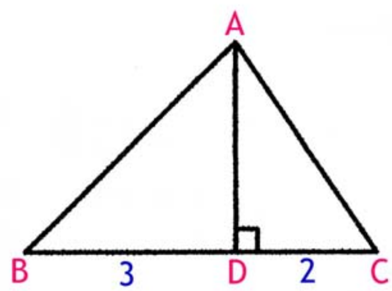
Karena garis melalui (4, 3) maka berlaku
3p = –4q + pq
(p – 4)(q – 3) = 12

* Jika p genap maka p = 2 sehingga q = –3. Tidak memenuhi q bulat positif.
* Jika p ganjil maka p – 4 ganjil. Nilai p – 4 yang mungkin memenuhi adalah ±1 atau ±3.
  - Jika p – 4 = –1 maka p = 3 dan q = –9. Tidak memenuhi q bulat positif.
  - Jika p – 4 = 1 maka p = 5 dan q = 15. Jadi persamaan garis adalah y = –3x + 15 yang melalui titik (4, 3)
  - Jika p – 4 = –3 maka p = 1 yang tidak memenuhi bahwa p adalah bilangan prima.
  - Jika p – 4 = 3 maka p = 7 dan q = 7. Jadi persamaan garis adalah y = –x + 7 yang melalui titik (4, 3)

Persamaan garis yang memenuhi adalah y = –3x + 15 dan y = –x + 7.

∴ Banyaknya garis yang memenuhi ada **2**.

6. Perhatikan gambar. Diketahui dari soal ∠BAC = 45°.



Misalkan luas segitiga ABC = [ABC]
Dengan dalil pitagoras didapat :
$AC^2 = AD^2 + 4$ ·················· (1)
$AB^2 = AD^2 + 9$ ·················· (2)
Persamaan (2) jumlahkan dengan (1) didapat
$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 13$ ···················· (3)
[ABC] = ½ BC · AD
Karena BC = 5 maka AD = $\frac{2[ABC]}{5}$ ····················· (4)
Pada segitiga ABC berlaku
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB\ AC \cos 45^o = AB^2 + AC^2 - 2\ AB\ AC \sin 45^o$
$25 = 2\ AD^2 + 13 - 4[ABC]$ ····················· (5)
Subtitusikan persamaan (4) ke (5)

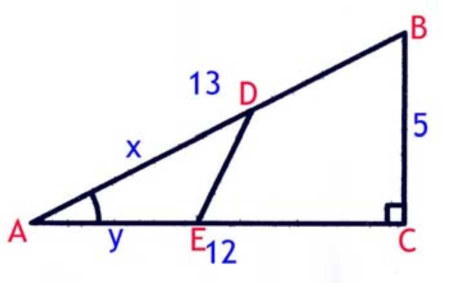
$$12 = \frac{8[ABC]^2}{25} - 4[ABC]$$

(2[ABC] + 5)([ABC] – 15) = 0
Maka [ABC] = 15
∴ Luas segitiga ABC adalah **15**.

7. Persamaan tersebut dapat diubah menjadi $(3x^2 + 1)(y^2 - 10) = 507 = 3 \cdot 13^2$
   Karena $3x^2 + 1$ bulat positif maka $y^2 - 10$ juga bilangan bulat positif. Faktor positif dari 507 ada 6 yaitu 1, 3, 13, 39, 169 dan 507.
   $y^2 - 10$ adalah faktor dari 507 maka y^2 = 11, 13, 23, 49, 179 atau 517 dan yang merupakan bilangan kuadrat sempurna hanya 49. Maka $y^2 = 49$.
   Sehingga $3x^2 + 1 = 13$.
   $\therefore$ $3x^2y^2 = 12 \times 49$ **= 588.**

8. $$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$
   $$\tan 15^\circ = \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$
   $$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$
   Dengan dalil cosinus
   $$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} \text{ sehingga } \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = \frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$$
   $$\sin\angle A = \left(2 + \sqrt{3}\right)\sin\angle B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$
   Karena $\angle C = 60^\circ$ maka $\angle A = 120^\circ - \angle B$
   $\sin\angle A = \sin(120^\circ - \angle B) = \sin 120^\circ \cos\angle B - \cos 120^\circ \sin\angle B$
   $$\left(2 + \sqrt{3}\right)\sin\angle B = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\angle B + \frac{1}{2}\sin\angle B$$
   $$\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\sin\angle B = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\angle B$$
   $$\tan\angle B = \frac{\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = \tan 15^o$$
   $\therefore$ Besarnya sudut B adalah **15^o**.

9. Karena banyaknya siswa = 100 orang sedangkan banyaknya siswa kelas II 50% lebih banyak dari siswa kelas III maka banyaknya siswa kelas II yang mengikuti seleksi = 60 orang sedangkan siswa kelas III = 40 orang.
   Misalkan skor rata-rata kelas III adalah x maka skor rata-rata kelas II adalah $\frac{2}{3}$x.
   $$100 = \frac{60 \cdot \frac{2}{3}x + 40 \cdot x}{100}$$
   x = 125
   $\therefore$ Skor rata-rata siswa kelas III adalah **125**.



10. Misalkan panjang AD = x dan panjang AE = y

Luas ΔABC = $\frac{1}{2}$(5)(12) = 30 dan sin A = $\frac{5}{13}$ serta cos A = $\frac{12}{13}$

Luas ΔADE = $\frac{1}{2}$xy sin A = 15. Maka xy = 78.

Sesuai dalil cosinus pada ΔADE maka :
$DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A = x^2 + y^2 - 144$
Dengan AM-GM maka
$DE^2 \geq 2xy - 144 = 12$
DE^2 akan minimum sama dengan 12 jika x = y = $\sqrt{78}$
$\therefore$ $DE_{minimum}$ = $2\sqrt{3}$

11. Misalkan ke-4 akar tersebut adalah x_1, x_2, x_3 dan x_4 dengan $x_1 = \sqrt{2}$ dan $x_2 = \sqrt{2008} = 2\sqrt{502}$.
$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$ yang merupakan bilangan rasional. Maka ada 2 kemungkinan nilai x_3 dan x_4.

- $x_3 = p - \sqrt{2} - 2\sqrt{502}$ dan x_4 = q untuk p dan q bilangan rasional.
  $x_1x_2x_3x_4$ = d yang merupakan bilangan rasional.
  $\left(\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{502}\right)\left(p-\sqrt{2}-2\sqrt{502}\right)(q)$ = bilangan rasional untuk p, q rasional
  $4p\sqrt{251} - 4\sqrt{251} - 2008\sqrt{2}$ = bilangan rasional.
  Maka tidak ada p rasional yang memenuhi
- $x_3 = p - \sqrt{2}$ dan $x_4 = q - 2\sqrt{502}$ untuk p dan q bilangan rasional.
  $x_1x_2x_3x_4$ = d yang merupakan bilangan rasional.
  $\left(\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{502}\right)\left(p-\sqrt{2}\right)\left(q-2\sqrt{502}\right)$ = bilangan rasional
  $4pq\sqrt{251} - 2008p\sqrt{2} - 4q\sqrt{502} + 4016$ = bilangan rasional
  Kesamaan di atas akan terpenuhi hanya jika p = q = 0 sehingga $x_3 = -\sqrt{2}$ dan $x_4 = -\sqrt{2008}$
  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2008})(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2008})$
  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 - 2)(x^2 - 2008) = x^4 - 2010x^2 + 4016$
  Maka a = 0, b = –2010, c = 0 dan d = 4016
  a + b + c + d = 0 – 2010 + 0 + 4016

$\therefore$ Nilai a + b + c + d adalah **2006**.

12. Misalkan [ABC] menyatakan luas ΔABC.

Berdasarkan dalil cosinus, cos $\angle$A = $\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$.

Maka ctg $\angle$A = $\frac{\cos \angle A}{\sin \angle A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4[ABC]}$

Dengan cara yang sama didapat :

ctg $\angle$B = $\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{4[ABC]}$ dan ctg $\angle$C = $\frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{4[ABC]}$

ctg $\angle$A + ctg $\angle$B + ctg $\angle$C = $\frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4[ABC]}$ = $\frac{16}{4}$

$\therefore$ ctg $\angle$A + ctg $\angle$B + ctg $\angle$C = **4.**

13. f(x) = x^2 + 4
    f(xy) = x^2y^2 + 4
    f(y – x) = $(y - x)^2$ + 4
    f(y + x) = $(y + x)^2$ + 4
    f(xy) + f(y – x) = f(y + x)
    $x^2y^2 + 4 + (y - x)^2 + 4 = (y + x)^2 + 4$
    $x^2y^2 + y^2 + x^2 - 2xy + 4 = y^2 + x^2 + 2xy$
    $x^2y^2 + 4 = 4xy$
    $(xy - 2)^2 = 0$
    Jadi xy = 2
    Dengan ketaksamaan AM-GM maka
    $x + y \ge 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2}$
    $\therefore$ Nilai minimum dari x + y adalah $2\sqrt{2}$

14. Jelas bahwa n harus genap.
    Misalkan n = $2^y \cdot p_1^{x1} \cdot p_2^{x2} \cdot \cdots \cdot p_k^{xk}$ dengan p_i untuk i = 1, 2, ⋅⋅⋅, k semuanya bilangan prima ganjil dan x_i untuk i = i, 2, ⋅⋅⋅, k semuanya bilangan bulat tak negatif serta y asli.
    Karena salah satu faktor dari n adalah 2 maka semua bilangan genap ≤ n tidak akan relatif prima dengan n. Banyaknya bilangan genap ≤ n ada tepat sebanyak $\frac{n}{2}$ dan banyaknya bilangan ganjil kurang dari n juga ada sebanyak $\frac{n}{2}$.
    Tetapi untuk semua 1 < p_i < n dengan i = 1, 2, ⋅⋅⋅, k juga merupakan faktor dari n yang mengakibatkan semua 1 < p_i < n dengan i = 1, 2, ⋅⋅⋅, k tidak akan relatif prima dengan n.
    Maka agar terpenuhi ada tepat $\frac{n}{2}$ bilangan kurang dari n dan relatif prima terhadap n maka n tidak boleh memiliki faktor ganjil selain 1. Jadi p_i = 1 untuk semua i = 1, 2, ⋅⋅⋅, k.
    Maka n = 2^y untuk suatu bilangan asli y.
    Karena n < 2008 maka 2^y < 2008. Jadi y ≤ 10.
    Maka nilai n yang memenuhi adalah 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.
    $\therefore$ Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi ada **10**.

15. Misalkan f(x) berderajat n maka $f(x^2)$ akan berderajat 2n.
 $x^3f(x)$ akan berderajat n + 3.
 - Jika n > 3 maka 2n > n + 3 sehingga $f(x^2) - x^3f(x)$ akan berderajat 2n > 6. Jadi, tanda kesamaan tidak mungkin terjadi.
 - Jika n = 3 maka $f(x^2)$ dan $x^3f(x)$ akan berderajat sama yaitu 6 sehingga masih dimungkinkan $f(x^2) - x^3f(x)$ akan berderajat 3.
 Jika $f(x) = x^3 - 2$ maka $f(x^2) - x^3f(x) = (x^6 - 2) - x^3(x^3 - 2) = 2(x^3 - 1)$ yang memenuhi.
 - Jika n < 3 maka 2n < n + 3 sehingga $f(x^2) - x^3f(x)$ akan berderajat n + 3. Karena ruas kanan berderajat 3 maka n = 0.

 ∴ Derajat f(x) adalah **3**.

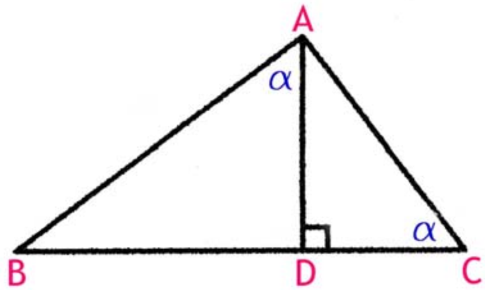
16. Banyaknya cara memilih 2 orang dari 20 orang = ${}_{20}C_2$ = 190.
 Banyaknya kemungkinan tanggal lahir dari 20 orang = 365^{20}.
 Peluang = ${}_{20}C_2 \cdot \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 347 \cdot 1}{365^{20}}$
 ∴ Peluang dari soal = $\frac{190 \cdot 365!}{346! \cdot 365^{20}}$ dengan tanda "!" menyatakan faktorial.

17. Ada dua kemungkinan jumlah ketiga bilangan tersebut genap
 - Ketiga bilangan tersebut semuanya genap
 $$\text{Peluang} = \frac{{}_{1004}C_3}{{}_{2008}C_3} = \frac{\frac{1004 \cdot 1003 \cdot 1002}{6}}{\frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006}{6}} = \frac{167}{1338}$$
 - Ada satu bilangan genap dan dua lainnya ganjil
 $$\frac{{}_{1004}C_1 \cdot {}_{1004}C_2}{{}_{2008}C_3} = \frac{1004 \cdot \frac{1004 \cdot 1003}{2}}{\frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006}{6}} = \frac{502}{1338}$$

 Peluang jumlah ketiga bilangan tersebut genap = $\frac{167}{1338} + \frac{502}{1338}$
 ∴ Peluang jumlah ketiga bilangan tersebut genap = $\frac{1}{2}$

18. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
 $10 = 4 + |B| - |A \cap B|$
 $|B| - |A \cap B| = 6$
 Jelas bahwa $0 \le |A \cap B| \le |A|$ sehingga $0 \le |A \cap B| \le 4$.
 Jadi $6 \le |B| \le 10$
 Karena $|B|$ bulat tak negatif maka $|B|$ = 6, 7, 8, 9 atau 10.
 ∴ $|B|$ = **6, 7, 8, 9 atau 10**.

19. Misalkan $\angle DAB = \angle ACD = \alpha$



ctg α = $\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$

$\frac{6}{8} = \frac{CD}{6}$ sehingga CD = $\frac{9}{2}$

Luas segitiga ABC = ½ · (BD + CD) · AD = $\frac{75}{2}$

$\therefore$ Luas segitiga ABC = $\frac{75}{2}$

20. Dengan binom Newton didapat

$$4^{1004} = (3+1)^{1004} = \binom{1004}{0}3^0 + \binom{1004}{1}3^1 + \binom{1004}{2}3^2 + \cdots + \binom{1004}{1004}3^{1004} = \sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k}$$

$\therefore \sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k}$ = $\mathbf{2^{2008}}$.